数理解析研究所講究録 1343 巻 2003 年 77-90

Equivalence classes of smooth $SU(p,q)$-actions on the complex projective $(p+q-1)$-space

都立航空高専・一般科　向山 一男 (Kazuo Mukōyama)
Department of General Education,
Tokyo Metropolitan College of Aeronautical Engineering

1 はじめに

球面 $S^{2p+2q-1}$ 及び $P_{p+q-1}(\boldsymbol{C})$ 上の $SU(p,q)$ 作用で極大コンパクト群 $S(U(p)\times U(q))$ へ制限した作用が標準的であるようなものがどれくらいあるか，については既に論文 [4] において調べている．[4] では，球面または複素射影空間上のそのような作用の集合全体は，3 次元または 2 次元球面上の群 $U(1,1)$ または $SU(1,1)$ のある条件を満たす作用全体の集合と 1 対 1 に対応していることを示している．そして，この結果を用いて，

(1) 2 つの空間上の作用の関係

(2) 作用が（加算）無限個存在すること

を示した．(2) の「無限個」の意味は，軌道の個数を指定する毎に 1 つの作用がある，ということであった．では，軌道の個数を固定したときに，作用はどれくらいあるであろうか．この問題は S^3 及び $P_1(\boldsymbol{C})=S^2$ 上の $SL(2,\boldsymbol{R})$ 作用の分類とも関係しており，興味ある問題である．

可微分多様体 M 上の Lie 群 G の 2 つの作用 Φ,Φ' は M 上の可微分同相写像 Ψ で次の図式を可換とするものが存在するとき，同値であるという．

$$\begin{array}{ccc} G\times M & \xrightarrow{\Phi} & M \\ {\scriptstyle id\times\Psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ G\times M & \xrightarrow[\Phi']{} & M \end{array}$$

以下では同値類を法とした分類を考える．

§2 では，本報告で使用する定義，記号，定理を述べる（詳細は [4] を参照せよ）．§3 では，球面上の作用の例（twisted linear 作用）を述べる．軌道が 3 本であるものが非加算無限に存在することを示す．しかしながら，これら球面上の作用から導かれる複素射影空間上の作用は，全て標準的となってしまう．§4, §5 では複素射影空間上の作用に関連して各種の同値類を定義し，それらの間の関係を述べ，証明をする．§6, §7 では，軌道が 3 本

であるような複素射影空間上の作用について得られた部分的な結果を述べる．この報告では常に$p,q \geq 3$としておく．

2 準備

非コンパクトLie群$SU(p,q)$を

$$SU(p,q)=\{\,g \in M(p+q,\boldsymbol{C}) \mid g^*I_{p,q}g=I_{p,q}, \det\, g=1\,\}$$

と定める．ここで，

$$I_{p,q}=\begin{pmatrix} -I_p & O \\ O & I_q \end{pmatrix}$$

である．$SU(p,q)$は単純群で，その極大コンパクト部分群は$S(U(p)\times U(q))$である．

球面及び複素射影空間上の標準的$SU(p,q)$作用$\Phi_0 : SU(p,q)\times S^{2p+2q-1} \to S^{2p+2q-1}$, $\Phi_1 : SU(p,q)\times P_{p+q-1}(\boldsymbol{C}) \to P_{p+q-1}(\boldsymbol{C})$を

$$\Phi_0(g,z)=\| gz \|^{-1}gz, \quad z \in S^{2p+2q-1},$$

$$\Phi_1(g,[z])=[gz], \quad [z]\in P_{p+q-1}(\boldsymbol{C})$$

により定義する．このとき，$S^{2p+2q-1}$上の$S(U(p)\times U(q))$への制限作用はorthogonalであり，余次元1の主軌道をもつ．また，主イソトロピー群は$S(U(p-1)\times U(q-1))$である．以後

$$G=SU(p,q), \quad K=S(U(p)\times U(q)),$$
$$H=S(U(p-1)\times U(q-1)), \quad \psi_0=\Phi_0|_{(K\times S^{2p+2q-1})}$$

と定める．一般に，$S^{2p+2q-1}$上のG作用で，K作用に制限したものがψ_0であるもの全体の集合を$\mathcal{A}$とおく．また

$$H'=\left\{ \begin{pmatrix} t & & & \\ & g_1 & & \\ & & t & \\ & & & g_2 \end{pmatrix} \in K \;\middle|\; t\in U(1), g_1 \in U(p-1), g_2 \in U(q-1) \right\},$$

$$\psi_1=\Phi_1|_{(K\times P_{p+q-1}(\boldsymbol{C}))}$$

と定める．$P_{p+q-1}(\boldsymbol{C})$上の作用$\Phi_1$の制限$K$作用$\psi_1$も余次元1の主軌道をもつ．主イソトロピー群は$H'$である．一般に，$P_{p+q-1}(\boldsymbol{C})$上の$G$作用で，$K$作用に制限したものが$\psi_1$であるもの全体の集合を$\mathcal{A}'$とおく．

$\boldsymbol{C}^{p+q}$の標準基底を$\{e_1,e_2,\ldots,e_{p+q}\}$とする．$SU(p,q)$の$\boldsymbol{C}^{p+q}$上の自然な左作用を考え，点$ae_1+be_{p+1}$でのイソトロピー群を$H(a:b)$とする．ただし，$(a,b)\neq(0,0)$としておく．また，

$$H'(a:b)=\{\,g\in SU(p,q) \mid g(ae_1+be_{p+1})=sae_1+sbe_{p+1}(\exists s\in U(1))\,\}$$

により $H'(a:b)$ を定義しておく．$H(a:b)$，$H'(a:b)$ は共に連結であり，$H(1:0)=SU(p-1,q)$, $H(0:1)=SU(p,q-1)$ かつ $\cap H(a:b)=SU(p-1,q-1)$ である．

$S(U(p)\times U(q))$ の部分群 T^2, T_0 , T_1 を

$$\begin{aligned}
T^2 &= \{\,\mathrm{diag}(t_1,1,1,\cdots,1,t_{p+1},1,1,\cdots,1,(t_1t_{p+1})^{-1})\,|\,t_1,t_{p+1}\in U(1)\,\},\\
T_0 &= \{\,\mathrm{diag}(t,1,1,\cdots,1,t,1,1,\cdots,1,t^{-2})\,|\,t\in U(1)\,\},\\
T_1 &= \{\,\mathrm{diag}(t,1,1,\cdots,1,t^{-1},1,1,\cdots,1,1)\,|\,t\in U(1)\,\}
\end{aligned}$$

と定める．$T^2=T_0T_1$ である．

$F(H)$，$F(H')$ をそれぞれ $S^{2p+2q-1}$ 上の H 作用 ψ_0 と $P_{p+q-1}(\boldsymbol{C})$ 上の H' 作用 ψ_1 の固定点集合とする．このとき

$$\begin{aligned}
F(H) &= \{\,(u,v)=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_{p+1}\,|\,|u|^2+|v|^2=1\,\}\cong S^3,\\
F(H') &= \{\,(u:v)=[u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_{p+1}]\,|\,|u|^2+|v|^2=1\,\}\cong P_1(\boldsymbol{C})
\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}
&S^{2p+2q-1}/K\cong F(H)/T^2\cong I\ \text{(interval)},\\
&P_{p+q-1}(\boldsymbol{C})/K\cong F(H')/T_1\cong I
\end{aligned}$$

である．

$SU(p,q)$ の部分群 $N'(p,q)$ を

$$N'(p,q)=\left\{\begin{pmatrix} g_1 & & g_2 & \\ & I_{p-1} & & \\ \bar{g}_2 & & \bar{g}_1 & \\ & & & I_{q-1}\end{pmatrix}\in G\right\}$$

と定め，$N(p,q)=T_0N'(p,q)$ とおく．$N(p,q),N'(p,q)\subset N_G(H)$ であり，それぞれ $F(H),F(H')$ 上に作用している．また，

$$N'(p,q)\cong SU(1,1)\cong SL(2,\boldsymbol{R}),N(p,q)\cong U(1,1)$$

である．$N'(p,q)$ の部分群 $M(p,q)$ を

$$M(p,q)=\left\{m(\theta)=\begin{pmatrix} \cosh\theta & & \sinh\theta & \\ & I_{p-1} & & \\ \sinh\theta & & \cosh\theta & \\ & & & I_{q-1}\end{pmatrix}\in G\right\}$$

と定める ($M(p,q)\cong\boldsymbol{R}$).

次のような群の分解が存在する ([4] 参照).

$$\begin{aligned}
SU(p,q) &= S(U(p)\times U(q))N'(p,q)H'(a:b)\quad \text{for}\quad \forall(a:b)\in P_1(\boldsymbol{C}),\\
SU(p,q) &= S(U(p)\times U(q))M(p,q)H'(a:b)\quad \text{for}\quad \forall(a:b)\in P_1(\boldsymbol{R}).
\end{aligned}$$

ϕ' を $F(H')$ 上の可微分 $N'(p,q)$ 作用とし，$f' : F(H') \to P_1(C)$ を可微分 $N'(p,q)$ 同変写像で次の条件を満たしているものとする．

$$\phi'|_{N'(p,q)\cap K} = \psi_1|_{N'(p,q)\cap K}$$
$$N'(p,q)_z \supset N'(p,q) \cap H'(a:b) \text{ for } f'(z) = (a:b)$$

このような組 (ϕ', f') 全体の集合を $\mathcal{B}'$ と定める．

3つ組 (S, φ', f_1') を，$F(H')$ の1次元可微分閉部分多様体 S, 可微分 $\boldsymbol{R}$ 作用 $\varphi' : \boldsymbol{R}\times S \to S$ と可微分写像 $f_1' : S \to P_1(\boldsymbol{R})$ の組で次の5つの条件を満たすものとする．

(i) S は J 不変で $P_1(\boldsymbol{R}) = \{(u:v) \in F(H') \,|\, u, v \in \boldsymbol{R}\}$ に微分同相であり $[e_1]$ と $[e_{p+1}]$ を含む．さらに，$S - \{[e_1], [e_{p+1}]\}$ は $P_1(\boldsymbol{R}) - \{(1:0), (0:1)\}$ 上の全ての T_1 軌道と transverse に交わる．

(ii) $J(\varphi'(\theta, z)) = \varphi'(-\theta, J(z))$,

(iii) $f_1'(J(z)) = (-a:b)$ for $f_1'(z) = (a:b)$,

(iv) $f_1'(\varphi'(\theta, z)) = m(\theta) f_1'(z)$,

(v) $f_1'(z) = (1:0) \Leftrightarrow z = [e_1]$, $f_1'(z) = (0:1) \Leftrightarrow z = [e_{p+1}]$.

ここで，J は $J(u:v) = (-u:v)$ と定義された $F(H')$ 上の Z_2 作用である．

この3つ組全体の集合を $\mathcal{C}'$ とおく．

定理 [4, Theorem 4.3] $\mathcal{A}'$ の元と $\mathcal{B}'$ の元とは1対1に対応している．

定理 [4, Theorem 4.5] $\mathcal{B}'$ の元と $\mathcal{C}'$ の元とは1対1に対応している．

$(\phi', f') \in \mathcal{B}'$ に対して $S^{2p+2q-1}$ 上の G 作用に対応する組 (ϕ, f) が構成できる（[4, §5]）．このことから自然な写像 $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ が導かれる．

命題 [4, Proposition 5.1] 写像 $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ は上への写像である．

3　$S^{2p+2q-1}$ 上の twisted linear 作用

ここでは，[4] 以降に得られた $S^{2p+2q-1}$ 上の作用の例（twisted linear 作用）とその特徴を述べる．$c \in \boldsymbol{R}$ をとる．作用 $\Phi_c : SU(p,q) \times S^{2p+2q-1} \to S^{2p+2q-1}$ を

$$\Phi_c(g, z) := \exp(ic\log \| gz \|)\frac{gz}{\| gz \|}$$

と定める．このとき $\Phi_c \in \mathcal{A}$ であり，この作用は3つの軌道（ 2つの開軌道 $G(e_1), G(e_{p+1})$ と1つのコンパクト軌道 $G((e_1 + e_{p+1})/\sqrt{2})$ ）をもち，さらに次が成り立つ．

補題 Φ_c と $\Phi_{c'}$ とが同値 $(\Phi_c \sim \Phi_{c'}) \Longleftrightarrow c = c'$

証明 Φ_c と $\Phi_{c'}$ とが同値ならば $c = c'$ を示そう．同値を与える $S^{2p+2q-1}$ 上の同変微分同相写像を ξ とする．球面上に1点 $z_0 = (e_1 + e_{p+1})/\sqrt{2}$ をとる．z_0 を通る軌道 $G(z_0)$ はコン

パクト軌道であり，

$$G(z_0) = S^{2p-1} \times S^{2q-1}$$

である．各点のイソトロピー群の関係から $\xi(G(z_0)) = G(z_0)$ であり，ξ が同変微分同相写像であることから $G_{z_0} = G_{\xi(z_0)}$ である．また，$G(z_0) = K(z_0)$ でもあることから，ある $t \in T_0$ をとると $\xi(z_0) = tz_0$ となっている．作用 Φ_c の点 z_0 でのイソトロピー群の Lie 環を $\mathfrak{h}_{z_0}$ とし，$g = \exp sA \in G_{z_0}$ とおく．このとき

$$A \in \mathfrak{h}_{z_0} \Leftrightarrow Az_0 = (1-ic)kz_0 \text{ for } \exists k \in \boldsymbol{R}$$

であることが分かる．$A \in \mathfrak{h}_{\xi(z_0)}$ でもあるので

$$A\xi(z_0) = (1-ic')k'\xi(z_0) \text{ for } \exists k' \in \boldsymbol{R}$$

一方 $A\xi(z_0) = Atz_0 = tAz_0 = (1-ic)k\xi(z_0)$ より

$$(1-ic')k' = (1-ic)k$$

である．従って $c = c'$ となる．□

系 球面 $S^{2p+2q-1}$ 上には，軌道を 3 本もつ G 作用が非加算無限に存在する．

しかしながら，作用 Φ_c の形からこれを射影空間上の作用に移すと皆同じになる．つまり

命題 任意の $c \in \boldsymbol{R}$ に対して $\rho(\Phi_c) = \Phi_1$ が成り立つ．

4 各種の同値類とそれらの関係

ここでは，$P_{p+q-1}(\boldsymbol{C})$ 上の可微分 $SU(p,q)$ 作用を同値類で分類するために各種の同値類の定義とその間の関係を述べる．

定義 2つの組 $(\phi, f), (\phi', f') \in \mathcal{B}'$ をとる．$F(H')$ 上のある微分同相写像 η で，$\eta J = J\eta$ を満たし，更に次の図式を可換とするものが存在するとき，組 (ϕ, f) と (ϕ', f') とは同値 $((\phi, f) \sim (\phi', f'))$ であるという．

$$\begin{array}{ccccc}
N'(p,q) \times F(H') & \xrightarrow{\phi} & F(H') & \xrightarrow{f} & P_1(\boldsymbol{C}) \\
{\scriptstyle id \times \eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle id} \\
N'(p,q) \times F(H') & \xrightarrow[\phi']{} & F(H') & \xrightarrow[f']{} & P_1(\boldsymbol{C}).
\end{array}$$

定義 2つの3つ組 $(S, \varphi, f), (S', \varphi', f') \in \mathcal{C}'$ を考える．微分同相写像 $\xi : S \longrightarrow S'$ で，$\xi J = J\xi$ を満たし，更に次の図式を可換とするものが存在するとき，3つ組 (S, φ, f_1) と

(S',φ',f_1') とは同値 $((S,\varphi,f_1)\sim(S',\varphi',f_1'))$ であるという.

$$\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{R}\times S & \xrightarrow{\varphi} & S & \xrightarrow{f_1} & P_1(\boldsymbol{R}) \\
{\scriptstyle id\times\xi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle id} \\
\boldsymbol{R}\times S' & \xrightarrow[\varphi']{} & S' & \xrightarrow[f_1']{} & P_1(\boldsymbol{R}).
\end{array}$$

このとき次が成り立つ.

定理 A $p,q\geq 3$ とする. $\mathcal{A}'$ の元の同値類全体の集合と $\mathcal{B}'$ の元の同値類全体の集合とは 1 対 1 に対応する.

定理 B $\mathcal{B}'$ の元の同値類全体の集合と $\mathcal{C}'$ の元の同値類全体の集合とは 1 対 1 に対応する. 更に, $\mathcal{C}'$ の元 (S,φ,f) の空間 S は, 常に標準的な $P_1(\boldsymbol{R})$ に置き換えることが出来る.

5 定理の証明

最初に定理 A を証明する.

$(p+q-1)$ 次元複素射影空間上の 2 つの可微分 $SU(p,q)$ 作用を Φ_1',Φ_2' とし, これより導かれる 2 つの組をそれぞれ $(\phi_1',f_1'),(\phi_2',f_2')$ とする.

補題 1 $\Phi_1'\sim\Phi_2'\Longrightarrow(\phi_1',f_1')\sim(\phi_2',f_2')$

証明 Φ_1' と Φ_2' の同値を与える微分同相写像を $\Psi:P_{p+q-1}(\boldsymbol{C})\longrightarrow P_{p+q-1}(\boldsymbol{C})$ とする. $(n,z)\in N'(p,q)\times F(H'),h\in H'$ とすると,

$$\begin{aligned}
\psi_1(h,\Phi_1'(n,z)) &= \Phi_1'(h,\Phi_1'(n,z))=\Phi_1'(hn,z)\\
&=\Phi_1'(nh',z)=\Phi_1'(n,z)
\end{aligned}$$

従って, $\Phi_1'(n,z)\in F(H')$. また $z\in F(H'),h\in H'$ のとき

$$\begin{aligned}
\psi_1(h,\Psi(z) &= \Phi_2'(h,\Psi(z))=\Psi\circ\Phi_1'(h,z)\\
&=\Psi\circ\psi_1(h,z)=\psi(z)
\end{aligned}$$

従って, $\Psi(z)\in F(H')$ である. ゆえに, Ψ,Φ_i' の制限を η,ϕ_i' とおく.

次に f_1' の定義から $z\in F(H')$ のとき $f_1'(z)=(a:b)$ であれば $\Phi_1'(H'(a:b),z)=z$. 従って $\Psi\circ\Phi_1'(H'(a:b),z)=\Psi(z)$ より $\Phi_2'(H'(a:b),\Psi(z))=\Psi(z)$. ゆえに $f_1'=f_2'\circ\eta$. さらに

$$\begin{aligned}
J\eta(z) &= \psi_1(j,\eta(z))=\psi_1(j,\Psi(z))\\
&=\Phi_2'(j,\Psi(z))=\Psi\circ\Phi_1'(j,z)=\Psi(J(z))=\eta J(z)
\end{aligned}$$

である. □

一方，2つの組 $(\phi'_1, f'_1), (\phi'_2, f'_2)$ が与えられたときにこれより構成される $(p+q-1)$ 次元複素射影空間上の作用をそれぞれ Φ'_1, Φ'_2 とする．

補題 2 $(\phi'_1, f_1) \sim (\phi'_2, f_2) \Longrightarrow \Phi'_1 \sim \Phi'_2$
証明 (ϕ'_1, f_1) と (ϕ'_2, f_2) の同値を与える $F(H')$ 上の微分同相写像を η とおく．G の部分群 $U'(z)$ $(z \in F(H'))$ を，$f_i(z) = (a_i : b_i)$ であるとき $U'(z) := H'(a_i : b_i)$ と定義しておく．
写像

$$\Phi'_i : G \times P_{p+q-1}(\boldsymbol{C}) \longrightarrow P_{p+q-1}(\boldsymbol{C})$$

を

$$\Phi'_i(g,p) := \psi_1(k'_i, \phi'_i(n_i, z_i))$$

と定める．ここで

$$\begin{aligned}
&k_i \in K, z_i \in F(H'); \psi_1(k_i, z_i) = p,\\
&k'_i \in K, n_i \in N'(p,q), u_i \in U'(z_i); gk_i = k'_i n_i u_i
\end{aligned}$$

と定めている．このとき Φ'_i は well-defined な G 作用であり可微分であることも分かる（証明は [3] と本質的に同じ）．
次に写像 $\Psi : P_{p+q-1}(\boldsymbol{C}) \longrightarrow P_{p+q-1}(\boldsymbol{C})$ を

$$\Psi(\psi_1(k,z)) := \psi_1(k, \eta(z))$$

と定める．このとき，Ψ は well-defined で可微分な G 不変写像である．従って Φ'_1 と Φ'_2 は同値である．□

補題 3 Φ' から (ϕ', f') を構成し (ϕ', f') から Φ'_1 を構成するとき，$\Phi' = \Phi'_1$ である．
証明 Φ'_1 を上記補題のように構成する．つまり

$$\begin{aligned}
\Phi'_1(g,p) &:= \psi_1(k', \phi'(n,z)),\\
&\quad \psi_1(k,z) = p\ ,\ k \in K\ ,\ z \in F(H'),\\
&\quad gk = k'nu \in KN'(p,q)U'(z)
\end{aligned}$$

とする．このとき

$$\begin{aligned}
\Phi'(g,p) &= \Phi'(k'nuk^{-1}, \psi_1(k,z))\\
&= \Phi'(k'nu, z)) = \Phi'(k'n, z)\\
&= \psi_1(k', \phi'(n,z)) = \Phi'_1(g,z)
\end{aligned}$$

となる．□

補題 4 (ϕ', f') から Φ' を構成し Φ' から (ϕ'_1, f'_1) を構成するとき，$(\phi', f') = (\phi'_1, f'_1)$ である．
証明 $(g, p) \in N'(p, q) \times F(H')$ ととると，$\psi_1(1, p) = p, g \cdot 1 = 1 \cdot g \cdot 1$ と分解できるので

$$\phi'_1(g, p) = \Phi'(g, p) = \psi_1(1, \phi'(g, p)) = \phi'(g, p)$$

となる．同様に $f'_1 = f'$ である．□

以上をまとめると定理 A が示せる．次に定理 B を証明する．
$\mathcal{B}'$ の元が $(\phi'_1, f'_1), (\phi'_2, f'_2)$ と 2 つ与えられたときに，これらより導かれる $\mathcal{C}'$ の元をそれぞれ $(S_1, \varphi'_1, f'_1), (S_2, \varphi'_2, f'_2)$ とする．

補題 5 $(\phi'_1, f'_1) \sim (\phi'_2, f'_2) \Longrightarrow (S_1, \varphi'_1, f'_1) \sim (S_2, \varphi'_2, f'_2)$
証明 (ϕ'_1, f'_1) と (ϕ'_2, f'_2) の同値を与える $F(H')$ 上の微分同相写像を η とする．$S_i = f_i'^{-1}(P_1(\boldsymbol{R}))$ とし，φ'_i, f'_i をそれぞれ ϕ'_i, f'_i の $M(p, q) \times S_i$ 及び S_i への制限とするとこれらは well-defined である．従って $\xi = \eta|_{S_1}$ とおくと結論を得る．□

一方，$\mathcal{C}'$ の元が $(S_1, \varphi'_1, f'_1), (S_2, \varphi'_2, f'_2)$ と 2 つ与えられたときに，これより構成される $\mathcal{B}'$ の元をそれぞれ $(\phi'_1, f'_1), (\phi'_2, f'_2)$ とする．

補題 6 $(S_1, \varphi'_1, f'_1) \sim (S_2, \varphi'_2, f'_2) \Longrightarrow (\phi'_1, f'_1) \sim (\phi'_2, f'_2)$
証明 (S_1, φ'_1, f'_1) と (S_2, φ'_2, f'_2) の同値を与える微分同相写像を ξ とする．ここでは部分群 $N'(p, q)$ の分解

$$N'(p, q) = T_1 M(p, q)(N'(p, q) \cap U'(x)) \ \ (\forall x \in S_i)$$

を利用する．写像 $\phi'_i : N'(p, q) \times F(H') \longrightarrow F(H')$ を次のように定義する．

$$\phi'_i(n, z) = \psi_1(t'_i, \varphi'_i(\theta_i, x_i)).$$

ここで

$$\begin{aligned} \psi_i(t_i, x_i) = z \quad , \qquad & t_i \in T_i, x_i \in S_i \\ nt_i = t'_i m(\theta_i) u_i \in & T_i M(p, q)(N'(p, q) \cap U'(x_i)). \end{aligned}$$

このとき，ϕ'_i は well-defined な可微分作用である．また，$F(H')$ 上の写像 η を

$$\eta(\psi_1(t, x)) := \psi_1(t, \xi(x)) \quad \text{for} \quad (t, x) \in T_1 \times S_1$$

と定める．このとき η は well-defined な T_1 同変位相同型であり，さらに，$N'(p, q)$ 同変な微分同相写像でもある（証明は本質的には [4] と同じ）．更に，$f'_i(\psi_1(t, x)) = t f'_i(x)$ であるので $f'_2 \circ \eta = f'_1$ となる．□

次の 2 つの補題も成り立つ．

補題 7 (ϕ', f') から (S, φ', f') を構成し (S, φ', f') から (ϕ'_1, f'_1) を構成するとき，$(\phi', f') = (\phi'_1, f'_1)$ である．

補題 8 (S, φ', f') から (ϕ', f') を構成し (ϕ', f') から (S_1, φ'_1, f'_1) を構成するとき，$(S, \varphi', f') = (S_1, \varphi'_1, f'_1)$ である．

補題 9 任意の 3 つ組 $(S_1, \varphi'_1, f'_1) \in \mathcal{C}'$ はある 3 つ組 $(P_1(\boldsymbol{R}), \varphi', f') \in \mathcal{C}'$ と同値である．
証明 条件 (i) より J 不変な微分同相写像 $h: P_1(\boldsymbol{R}) \longrightarrow S_1$ を作れる．この h を用いて 2 つの写像 $\varphi': \boldsymbol{R} \times P_1(\boldsymbol{R}) \longrightarrow P_1(\boldsymbol{R}), f': P_1(\boldsymbol{R}) \longrightarrow P_1(\boldsymbol{R})$ を

$$\begin{aligned} \varphi'(\theta, x) &:= h^{-1}(\varphi'_1(\theta, h(x))), \\ f'(x) &:= f'_1(h(x)) \end{aligned}$$

と定める．このとき，3 つ組 $(P_1(\boldsymbol{R}), \varphi', f')$ は条件 (ii) から (v) を満たしており，(S_1, φ'_1, f'_1) と同値である．□

以上の補題より定理 B を得る．

6 ある同値関係

前節で得られた 3 つ組 $(P_1(\boldsymbol{R}), \varphi', f')$ の条件 (ii) から (v) をある関数の組 (g, h_i) $(i = 1, 2)$ を用いた条件に置き換えよう．

$$P_1(\boldsymbol{R}) = \{(u, v) \in \boldsymbol{R}^2 | u^2 + v^2 = 1\,,\, v \geq 0\} / \{(1, 0) \sim (-1, 0)\}$$

と同一視する．$P_1(\boldsymbol{R})$ 上の単位接ベクトル場 L を

$$L_z = -v \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_z + u \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_z$$

と定める．
1 係数部分群 $\varphi'(\theta, z)$ が与えられたときに，これのつくるベクトル場を gL とする．つまり，ν を $s \in P_1(\boldsymbol{R})$ の近傍で定義されている任意の可微分関数とするとき

$$(gL)_z \nu = g(z) L_z \nu = \left. \frac{d\nu\varphi'(\theta, z)}{d\theta} \right|_{\theta=0}$$

と定める．g は $P_1(\boldsymbol{R})$ 上の可微分関数である．
更に，

$$f(z) = \begin{cases} (h_1(z) : 1) & (z \neq [\mathrm{e}_1]) \\ (1 : h_2(z)) & (z \neq [\mathrm{e}_{p+1}]) \end{cases}$$

により関数 h_1, h_2 を定める．2 つの関数 $h_1 : P_1(\boldsymbol{R}) - [\mathrm{e}_1] \longrightarrow \boldsymbol{R},\ h_2 : P_1(\boldsymbol{R}) - [\mathrm{e}_{p+1}] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は可微分である．$z \in P_1(\boldsymbol{R}) - \{[\mathrm{e}_1], [\mathrm{e}_{p+1}]\}$ のときは $h_1(z) h_2(z) = 1$ である．

補題 10 条件 (ii) は次の条件 (ii)' と同値である.

(ii)' $g(J(z)) = g(z)$

証明 条件 (ii) が成り立つとき

$$
\begin{aligned}
g(z)L_z\nu &= (gL)_z\nu \\
&= \left.\frac{d\nu\varphi'(\theta,z)}{d\theta}\right|_{\theta=0} \\
&= \left.\frac{d\nu J\varphi'(-\theta,J(z))}{d\theta}\right|_{\theta=0} \\
&= -(gL)_{J(z)}(\nu J) = -g(J(z))L_{J(z)}(\nu J) \\
&= g(J(z))L_z(\nu).
\end{aligned}
$$

従って, $g(J(z)) = g(z)$. 逆に, この式が成り立っているとき

$$
\begin{aligned}
J_*(gL)_z\nu = (gL)_{J(z)}(\nu\circ J) &= g(J(z))L_{J(z)}(\nu\circ J) \\
&= g(z)L_{J(z)}(\nu\circ J) = -g(z)L_z(\nu)
\end{aligned}
$$

であるので $J_*(gL) = -gL$. ゆえに

$$
\begin{aligned}
J\varphi(\theta,J(z)) &= J(Exp(\theta(gL)))J(z) = (Exp(J_*(\theta gL)))(z) \\
&= (Exp(\theta J_*(gL)))(z) = (Exp(-\theta gL))(z) \\
&= \varphi(-\theta,z).
\end{aligned}
$$

従って $J\varphi(-\theta,z) = \varphi(\theta,J(z))$. □

また, 次も成り立つ,

補題 11 条件 (iii) は次の条件 (iii)' と同値である.

(iii)' $h_1(J(z)) = -h_1(z)$, $h_2(J(z)) = -h_2(z)$

補題 12 条件 (v) は次の条件 (v)' と同値である.

(v)' $h_1(z) = 0 \Leftrightarrow z = [e_{p+1}]$, $h_2(z) = 0 \Leftrightarrow z = [e_1]$

補題 13 条件 (v) が成り立つとき, 条件 (iv) は次の条件 (iv)' と同値である.

(iv)' $(gL)_z h_1 = 1 - h_1(z)^2$, $z \in P_1(\boldsymbol{R}) - \{[e_1]\}$

$(gL)_z h_2 = 1 - h_2(z)^2$, $z \in P_1(\boldsymbol{R}) - \{[e_{p+1}]\}$

証明 条件 (iv) が成り立つとする．この式を書き直す．$f'(\varphi'(\theta,z)) \neq [e_1]$ であれば，

$$h_1(\varphi'(\theta,z)) = \frac{h_1(z)+\tanh\theta}{1+h_1(z)\tanh\theta} \quad .$$

従って

$$\begin{aligned}(gL)_z h_1 &= \left.\frac{dh_1\varphi'(\theta,z)}{d\theta}\right|_{\theta=0} \\ &= \left(\frac{1-h_1(z)^2}{\cosh^2\theta(1+h_1(z)\tanh\theta)^2}\right)_{\theta=0} \\ &= 1-h_1(z)^2.\end{aligned}$$

逆に (iv)$'$ がなりたっているとする．gL の 1 径数部分群を $\varphi'(\theta,z)$ とおく．$z \in P_1(\boldsymbol{R}) - \{[e_1]\}$ を固定しておく．

$$H(\theta) = h_1(\varphi'(\theta,z)) \quad \text{for any} \quad \theta \in \boldsymbol{R} \quad \text{with} \quad \varphi'(\theta,z) \neq [e_1]$$

とおくと $H(\theta)$ は微分方程式

$$\frac{dH(\theta)}{d\theta} = 1 - H(\theta)^2 \quad (*)$$

を満たし，更に初期条件 $H(0) = h_1(z)$ も満たす．一方

$$H_c(\theta) = \frac{c+\tanh\theta}{1+c\tanh\theta}$$

は $(*)$ の解である．したがって，定義域と初期条件により求める解は $H(\theta) = H_{h_1(z)}(\theta)$ である．([1] 参照) □

次に組 (g,h_i) $(i=1,2)$ に同値関係を定義する．

定義 $P_1(\boldsymbol{R})$ 上のある微分同相写像 ξ が存在して，$h_i = h_i'\xi$ を満たし，更に，$(g'L)_{\xi(z)} = (d\xi)_z(gL)_z$ を満たすとき，つまり $gL, g'L$ にたいして次の図式が可換であるとき，2 つの組 (g,h_i) と (g',h_i') とは同値であるという．

$$\begin{array}{ccc} TP_1(\boldsymbol{R}) & \xrightarrow{d\xi} & TP_1(\boldsymbol{R}) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ P_1(\boldsymbol{R}) & \xrightarrow[\xi]{} & P_1(\boldsymbol{R}) \\ {\scriptstyle h_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_i'} \\ \boldsymbol{R} & \xrightarrow[id]{} & \boldsymbol{R}. \end{array}$$

定理 C C' の元の同値類全体の集合と組 (g,h_i) の同値類全体の集合とは 1 対 1 に対応する．

証明 同値な 2 つの 3 つ組 $(P_1(\boldsymbol{R}), \varphi_1', f_1'), (P_1(\boldsymbol{R}), \varphi_2', f_2')$ があり，これらから導かれる 2 つ

の組を $(g_1,h_i^1),(g_2,h_i^2)$ とする．定義の条件を満たす可微分同相写像 $\xi: P_1(\boldsymbol{R}) \longrightarrow P_1(\boldsymbol{R})$ が存在する．$f_1'(z)=f_2'\circ\xi(z)$ より $h_i^1=h_i^2\circ\xi$．一方，$\xi\varphi_1'(\theta,z)=\varphi_2'(\theta,\xi(z))$ であるので，$P_1(\boldsymbol{R})$ 上の任意の可微分関数 ν にたいして

$$\begin{aligned}(g_2L)_{\xi(z)}\nu &= \left.\frac{d\nu\varphi_2'(\theta,\xi(z))}{d\theta}\right|_{\theta=0}\\ &= \left.\frac{d\nu\xi\varphi_1'(\theta,z)}{d\theta}\right|_{\theta=0}\\ &= (g_1L)_z(\nu\xi)=(d\xi)_z(g_1L)_z\nu.\end{aligned}$$

従って，$(g_2L)_{\xi(z)}=(d\xi)_z(g_1L)_z$．

逆に $(g_1,h_i^1)\sim(g_2,h_i^2)$ とし，同値を与える写像を ξ とする．$h_i^1=h_i^2\circ\xi$ より $f_1'(z)=f_2'\circ\xi(z)$ である．

次に g_1L,g_2L から導かれる1径数部分群を φ_1',φ_2' とする．また，$\bar{\varphi}'(\theta,z)=\xi^{-1}\varphi_2'(\theta,\xi(z))$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\nu\xi\bar{\varphi}'(\theta,z)}{d\theta}\right|_{\theta=0} &= \left.\frac{d\nu\varphi_2'(\theta,\xi(z))}{d\theta}\right|_{\theta=0}\\ &= (g_2L)_{\xi(z)}\nu=(d\xi)_z(g_1L)_z\nu\\ &= (g_1L)_z(\nu\xi)\\ &= \left.\frac{d\nu\xi\varphi_1'(\theta,z)}{d\theta}\right|_{\theta=0}\end{aligned}$$

であり，$\bar{\varphi}'(0,z)=\varphi_1'(0,z)=z$ であるので $\bar{\varphi}'(\theta,z)=\varphi_1'(\theta,z)$．従って

$$\varphi_2'(\theta,\xi(z))=\xi\varphi_1'(\theta,z)$$

となり，結論を得る．□

7　2つの例とその同値性

軌道の数が3本である様な作用の例を2つ示す．1つは標準的な作用 Φ_1 である．この作用に対応する関数の組を (g,h_i) とする．もう1つの作用を Φ_2 とする．この作用は次の様にして構成される．

最初に次のような関数を考える．

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \exp(-\frac{1}{x^2})\quad \text{if}\quad x>0\ ,=0\quad \text{if}\quad x\le 0,\\ \eta(x) &= \rho(\rho(x)),\\ \alpha(x) &= \frac{\eta(x_1)-\eta(x_2)}{\eta(x_1)+\eta(x_2)},\\ \beta(x) &= \frac{x_1^3x_2^3\rho(x_1)^2\rho(x_2)^2}{x_1^3\rho(x_1)^2+x_2^3\rho(x_2)^2}\ (x_1=\frac{1+x}{2},x_2=\frac{1-x}{2}),\\ \gamma(x) &= \frac{1}{\alpha(x)}.\end{aligned}$$

このとき，次が成り立つ．

$$\beta(x)\frac{d\alpha}{dx} = 1 - \alpha(x)^2,$$
$$\beta(x)\frac{d\gamma}{dx} = 1 - \gamma(x)^2.$$

これらの関数を用いて関数 $a(\theta), b(\theta)$ を次のように定義する．

$$a(\theta) = \gamma(\omega_0(\theta))\alpha(\omega_{2m-1}(\theta))\gamma(\omega_{4m-2}(\theta)) \quad (0 < \theta < \pi),$$
$$b(\theta) = s\sum_{j=0}^{4m-2}(-1)^j\beta(\omega_j(\theta)) \quad (0 \leq \theta \leq \pi),$$
$$\text{ここで,}\quad s = \frac{\pi}{8m-4}, \omega_j(\theta) = \frac{\theta - 2js}{s} \quad .$$

これらの関数に対しても次が成り立つ．

$$b(\theta)\frac{da}{d\theta} = 1 - a(\theta)^2 \quad .$$

$P_1(\boldsymbol{R})$ の元を $z := (\cos\theta : \sin\theta)$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とし，組 (g', h'_i) を次のように定義する．

$$g'(z) = b(\theta) \quad \text{if} \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$
$$h'_1(z) = a(\theta) \quad \text{if} \quad 0 < \theta < \pi,$$
$$h'_2(z) = \frac{1}{h'_1(z)}.$$

この組より導かれる $SU(p,q)$ 作用は $(4m-1)$ 本の軌道をもつ．そこで，$m = 1$ とおいた場合の作用を Φ_2 と定める．

$P_1(\boldsymbol{R})$ を $[0,\pi]/\{0 \sim \pi\}$ と同一視する．この同一視により導かれる関数の組をそれぞれ $(\bar{g}(\theta), \bar{h}_i(\theta))$，$(\bar{g}'(\theta), \bar{h}'_i(\theta))$ とおく．このとき，ベクトル場 L_z は $\left(\frac{d}{d\theta}\right)_\theta$ と同一視される．

例 1 作用 Φ_1 に対応する関数の組 $(\bar{g}(\theta), \bar{h}_i(\theta))$．つまり

$$\bar{g}(\theta) = \cos 2\theta \quad , \quad \bar{h}_1(\theta) = \cot\theta \quad , \quad \bar{h}_2(\theta) = \tan\theta$$

例 2 作用 Φ_2 に対応する関数の組 $(\bar{g}'(\theta), \bar{h}'_i(\theta))$．つまり

$$\bar{g}'(\theta) = b(\theta) \quad , \quad \bar{h_1}'(\theta) = a(\theta) \quad , \quad \bar{h_2}'(\theta) = \frac{1}{a(\theta)}$$

この 2 つの作用に対して次のことが成り立つ．

命題 2 つの作用 Φ_1 と Φ_2 とは同値ではない．

証明 2つの作用 Φ_1 と Φ_2 とは同値であるとする．このとき，2つの関数の組 (g,h_i) と (g',h'_i) も同値である．この同値関係を与える微分同相写像を $\xi: P_1(\boldsymbol{R}) \longrightarrow P_1(\boldsymbol{R})$ とする．この ξ の2つの条件式 $(g'L)_{\xi(z)} = (d\xi)_z(gL)_z$，$h_i = h'_i\xi$ を上で述べた同一視を用いて2つの関数の組 $(\bar{g}(\theta),\bar{h}_i(\theta))$ と $(\bar{g}'(\theta),\bar{h}'_i(\theta))$ の条件式に書き直すと次のようになる．

$$\bar{g}(\theta)\frac{d\xi}{d\theta} = \bar{g}'(\xi(\theta)) \tag{7.1}$$

$$\bar{h}_i(\theta) = \bar{h}'_i(\xi(\theta)) \tag{7.2}$$

また，2つの条件式より

$$\xi([\boldsymbol{e}_1]) = [\boldsymbol{e}_1], \xi([\boldsymbol{e}_{p+1}]) = [\boldsymbol{e}_{p+1}],$$
$$g(z) = 0 \Longrightarrow g'(\xi(z)) = 0$$

が成り立つ．従って $\xi([0,\pi/4]) = [0,\pi/4]$ であるので，ξ の $[0,\pi/4])$ への制限を考えると，上記の2つの式 (7.1), (7.2) は次のように書き直せる．

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{s\beta(\frac{1}{s}\xi(\theta))}{\cos 2\theta} \tag{7.3}$$

$$\cot\theta = \gamma(\frac{1}{s}\xi(\theta)) \tag{7.4}$$

ここで $s = \pi/4$ である．(7.3) を解くと $\xi = \xi(\theta)$ は次式で与えられる関数である．

$$\exp\frac{8s^2}{(s-\xi)^2} - \exp\frac{8s^2}{(s+\xi)^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin 2\theta}{1-\sin 2\theta}$$

これと (7.4) を比較することにより矛盾がでる．従って，この2つの作用は同値ではない．
□

系 $P_{p+q-1}(\boldsymbol{C})$ 上の G 作用で3本の軌道を持つものが少なくとも2つ存在する．

参考文献

[1] T. Asoh, On smooth $SL(2,\boldsymbol{C})$ actions on 3-manifolds, Osaka J. Math. 24(1987)271–298.

[2] F. Uchida, On a smooth $SO_0(p,q)$-actions on S^{p+q-1}, Osaka J. Math. 26(1989), 775–784

[3] K. Mukōyama, Smooth $Sp(2,\boldsymbol{R})$-actions on the 4-sphere, Tôhoku Math. J. 48(1996), 543–560.

[4] K. Mukōyama, Smooth $SU(p,q)$-actions on the (2p+2q-1)-sphere and on the complex projective (p+q-1)-space, Kyushu J. Math. 55(2001), 213–236.